Colectivo Graca

Sitio web mantenido por Maicoliv desde el 25 de enero de 2009

Los múltiplos de un número.

Definición (de múltiplo de un número)

Un número natural, b, diremos que es múltiplo de otro número natural, a, si existe un tercer número natural, c, con el que se verifica la siguiente igualdad:

$$b = a \cdot c$$

Observación

La definición anterior equivale a decir que b es múltiplo de a si y sólo si "b está en la tabla de multiplicar de a".

Se entiende, desde luego, que las tablas de multiplicar son ilimitadas, por lo que aceptamos, por ejemplo, que b sea igual que a · 6814.

Definición (de números pares e impares)

Decimos que un número natural es par si es múltiplo de 2.
En caso contrario diremos que es impar.

Ejemplo

Encuentra tres múltiplos de 4.

- Respuesta: 4, 8 y 12 son tres múltiplos de 4.
- Justificación:
    - 4 = 4 · 1, por lo tanto, 4 es múltiplo de 4.
    - 8 = 4 · 2, por lo tanto, 8 es múltiplo de 4.
    - 12 = 4 · 3, por lo tanto, 12 es múltiplo de 4. FIN.

Notación

Podemos abreviar las respuestas dadas y su justificación usando la siguiente notación para representar al conjunto de todos los múltiplos de un número a.

$\dot{a} =$ conjunto de todos los múltiplos de a,

el símbolo $\in$, que se lee "pertenece a", que usaremos para indicar que un número (u otro objeto) es un elemento de un conjunto,
y el símbolo $\Rightarrow$ que llamamos "implicación" y que podemos traducir como "por lo tanto", "de donde se deduce que", "lo que implica", "entonces", u otras expresiones similares.

<u>Ejemplo</u>

Justifica la posible existencia de tres múltiplos de 9.

- Respuesta: sí existen tres múltiplos de 9, por ejemplo, 9, 90 y 900.
- Demostración:
  - $9 = 9 \cdot 1 \Rightarrow 9 \in \dot{9}$.
  - $90 = 9 \cdot 10 \Rightarrow 90 \in \dot{9}$.
  - $900 = 9 \cdot 100 \Rightarrow 900 \in \dot{9}$. FIN.

<u>Lectura</u>

En la justificación anterior, si traducimos literalmente los símbolos al lenguaje natural, leeríamos:
"Nueve es igual a nueve por uno, por lo tanto, nueve pertenece al conjunto de todos los múltiplos de nueve".
"Noventa es igual a nueve por diez, por lo tanto, noventa pertenece al conjunto de todos los múltiplos de nueve".
"Novecientos es igual a nueve por cien, por lo tanto, novecientos pertenece al conjunto de todos los múltiplos de nueve."

Observa que "noventa pertenece al conjunto de todos los múltiplos de nueve" no es más que una manera muy precisa de decir que "noventa es un múltiplo de nueve".

<u>Ejemplo</u>

Determina cuáles de los siguientes números son múltiplos de 2, 3, 5 y/o 10:
15; 40; 86; 65; 22; 1; 66; 49; 58; 6

- Respuesta:
  1) $40 ; 86 ; 22 ; 66 ; 58 ; 6 \in \dot{2} \quad y \quad 15 ; 65 ; 1 ; 49 \notin \dot{2}$
  2) $15 ; 66 ; 6 \in \dot{3} \quad y \quad 40 ; 86 ; 65 ; 22 ; 1 ; 49 ; 58 \notin \dot{3}$
  3) $15 ; 40 ; 65 \in \dot{5} \quad y \quad 86 ; 22 ; 1 ; 66 ; 49 ; 58 ; 6 \notin \dot{5}$

4) $40 \in \dot{10}$ y $15 ; 86 ; 65 ; 22 ; 1 ; 66 ; 49 ; 58 ; 6 \notin \dot{10}$

Notación: el símbolo $\notin$ se lee "no pertenece a" y en esta actividad nos permite ofrecer de forma breve los números que <u>no</u> son múltiplos de 2, 3, 5 ó 10.

- Demostración:

1) $40 = 2 \cdot 20 \Rightarrow 40 \in \dot{2}$

$86 = 2 \cdot 43 \Rightarrow 86 \in \dot{2}$

$22 = 2 \cdot 11 \Rightarrow 22 \in \dot{2}$

$66 = 2 \cdot 33 \Rightarrow 66 \in \dot{2}$

$58 = 2 \cdot 29 \Rightarrow 58 \in \dot{2}$

$6 = 2 \cdot 3 \Rightarrow 6 \in \dot{2}$

$2 \cdot 7 = 14 \quad ; \quad 2 \cdot 8 = 16 \Rightarrow 15 \notin \dot{2}$

$2 \cdot 32 = 64 \quad ; \quad 2 \cdot 33 = 66 \Rightarrow 65 \notin \dot{2}$

$2 \cdot 0 = 0 \quad ; \quad 2 \cdot 1 = 2 \Rightarrow 1 \notin \dot{2}$

$2 \cdot 24 = 48 \quad ; \quad 2 \cdot 25 = 50 \Rightarrow 49 \notin \dot{2}$

2) $15 = 3 \cdot 5 \Rightarrow 15 \in \dot{3}$

$66 = 3 \cdot 22 \Rightarrow 66 \in \dot{3}$

$6 = 3 \cdot 2 \Rightarrow 6 \in \dot{3}$

$3 \cdot 13 = 39 \quad ; \quad 3 \cdot 14 = 42 \Rightarrow 40 \notin \dot{3}$

$3 \cdot 28 = 84 \quad ; \quad 3 \cdot 29 = 87 \Rightarrow 86 \notin \dot{3}$

$3 \cdot 21 = 63 \quad ; \quad 3 \cdot 22 = 66 \Rightarrow 65 \notin \dot{3}$

$3 \cdot 7 = 21 \quad ; \quad 3 \cdot 8 = 24 \Rightarrow 22 \notin \dot{3}$

$3 \cdot 0 = 0 \quad ; \quad 3 \cdot 1 = 3 \Rightarrow 1 \notin \dot{3}$

$3 \cdot 16 = 48 \quad ; \quad 3 \cdot 17 = 51 \Rightarrow 49 \notin \dot{3}$

$3 \cdot 19 = 57 \quad ; \quad 3 \cdot 20 = 60 \Rightarrow 58 \notin \dot{3}$

3) $15 = 5 \cdot 3 \Rightarrow 15 \in \dot{5}$

$40 = 5 \cdot 8 \Rightarrow 40 \in \dot{5}$

$65 = 5 \cdot 13 \Rightarrow 65 \in \dot{5}$

$5 \cdot 17 = 85 \quad ; \quad 5 \cdot 18 = 90 \Rightarrow 86 \notin \dot{5}$

$5 \cdot 4 = 20 \quad ; \quad 5 \cdot 5 = 25 \Rightarrow 22 \notin \dot{5}$

$5 \cdot 0 = 0 \quad ; \quad 5 \cdot 1 = 5 \Rightarrow 1 \notin \dot{5}$

$5 \cdot 13 = 65 \quad ; \quad 5 \cdot 14 = 70 \Rightarrow 66 \notin \dot{5}$

$5 \cdot 9 = 45 \quad ; \quad 5 \cdot 10 = 50 \Rightarrow 49 \notin \dot{5}$

$5 \cdot 11 = 55 \quad ; \quad 5 \cdot 12 = 60 \Rightarrow 58 \notin \dot{5}$

$5 \cdot 1 = 5 \quad ; \quad 5 \cdot 2 = 10 \Rightarrow 6 \notin \dot{5}$

4) $40 = 10 \cdot 4 \Rightarrow 40 \in \dot{10}$

$10 \cdot 0 = 0 \quad ; \quad 10 \cdot 1 = 10 \Rightarrow 1 \notin \dot{10}$ y $6 \notin \dot{10}$

$10 \cdot 1 = 10 \quad ; \quad 10 \cdot 2 = 20 \Rightarrow 15 \notin \dot{10}$

$10 \cdot 2 = 20 \quad ; \quad 10 \cdot 3 = 30 \Rightarrow 22 \notin \dot{10}$

$10 \cdot 4 = 40 \quad ; \quad 10 \cdot 5 = 50 \Rightarrow 49 \notin \dot{10}$

$10 \cdot 5 = 50 \quad ; \quad 10 \cdot 6 = 60 \Rightarrow 58 \notin \dot{10}$

$10 \cdot 6 = 60 \quad ; \quad 10 \cdot 7 = 70 \Rightarrow 65 \notin \dot{10}$ y $66 \notin \dot{10}$

$10 \cdot 8 = 80 \quad ; \quad 10 \cdot 9 = 90 \Rightarrow 86 \notin \dot{10}$

FIN.

Aun usando la calculadora, el uso de la definición para distinguir los múltiplos de un número de los que no lo son resulta demasiado largo, como has podido comprobar en el ejercicio anterior. Ha llegado por ello el momento de aumentar nuestro conocimiento con algunas propiedades útiles de los múltiplos de un número que nos faciliten la tarea.

<u>Proposición.</u> (Criterios para comprobar si un número es múltiplo de 2, 3, 5 y 10)

Las siguientes afirmaciones son todas ciertas:

1) Todos los números pares son múltiplos de 2.
   Ningún número impar es múltiplo de 2.

2) Todos los números cuya última cifra es cero o 5 son múltiplos de 5.
   Ningún número cuya última cifra no sea ni cero ni 5 es múltiplo de 5.

3) Todos los números cuya última cifra es cero son múltiplos de 10.
   Ningún número cuya última cifra no sea cero es múltiplo de 10.

4) Si al sumar las cifras de un número se obtiene un múltiplo de 3, entonces el número de partida era múltiplo de 3.

Si al sumar las cifras de un número el resultado no es múltiplo de 3, entonces el número de partida tampoco era múltiplo de 3.

Nota: todas las afirmaciones hechas deben demostrarse, pero dado que las 3 primeras son bastante evidentes y que la demostración de la última, que no resulta nada clara, nos obligaría a enunciar y demostrar propiedades relativas a los restos obtenidos al dividir, que no es la operación de la que nos ocupamos al hablar de múltiplos de un número, he preferido posponer sus demostraciones para un capítulo posterior (que elaboraré lo antes posible) y cerrar este capítulo con otra propiedad cuya demostración no requiere de la división.

Veamos ahora cómo utilizar los criterios de divisibilidad para facilitarnos la tarea de justificar la respuesta en otro ejercicio como el anterior.

<u>Ejemplo</u>

Determina cuáles de los siguientes números son múltiplos de 2, 3, 5 y/o 10:
41; 75; 38; 83; 31; 91; 22; 89; 72; 48

- Respuesta:
    1) $38 ; 22 ; 72 ; 48 \in \dot{2} \quad y \quad 41 ; 75 ; 83 ; 31 ; 91 ; 89 \notin \dot{2}$
    2) $75 ; 72 ; 48 \in \dot{3} \quad y \quad 41 ; 38 ; 83 ; 31 ; 91 ; 22 ; 89 \notin \dot{3}$
    3) $75 \in \dot{5} \quad y \quad 41 ; 38 ; 83 ; 31 ; 91 ; 22 ; 89 ; 72 ; 48 \notin \dot{5}$
    4) $41 ; 75 ; 38 ; 83 ; 31 ; 91 ; 22 ; 89 ; 72 ; 48 \notin \dot{10}$

- Demostración:
    1) Todos los números pares son múltiplos de 2 y ningún número impar es múltiplo de 2.
    2) Si al sumar las cifras de un número se obtiene un múltiplo de 3 entonces el número es múltiplo de 3 y si la suma no es múltiplo de 3 entonces el número tampoco lo es.

$$\left.\begin{array}{c} 7+5=12 \\ 12=3\cdot 4 \Rightarrow 12 \in \dot{3} \end{array}\right\} \Rightarrow 75 \in \dot{3} \qquad \left.\begin{array}{c} 7+2=9 \\ 9=3\cdot 3 \Rightarrow 9 \in \dot{3} \end{array}\right\} \Rightarrow 72 \in \dot{3}$$

$$\left.\begin{array}{c} 4+8=12 \\ 12=3\cdot 4 \Rightarrow 12 \in \dot{3} \end{array}\right\} \Rightarrow 48 \in \dot{3} \qquad \left.\begin{array}{c} 4+1=5 \\ 3\cdot 1=3 ; 3\cdot 2=6 \Rightarrow 5 \notin \dot{3} \end{array}\right\} \Rightarrow 41 \notin \dot{3}$$

$$\left.\begin{array}{c} 3+8=11 \\ 3\cdot 3=9 ; 3\cdot 4=12 \Rightarrow 11 \notin \dot{3} \end{array}\right\} \Rightarrow 38 \notin \dot{3} \qquad \left.\begin{array}{c} 8+3=11 \\ 3\cdot 3=9 ; 3\cdot 4=12 \Rightarrow 11 \notin \dot{3} \end{array}\right\} \Rightarrow 83 \notin \dot{3}$$

$$\left.\begin{array}{c} 3+1=4 \\ 3\cdot 1=3\,;\,3\cdot 2=6 \Rightarrow 4\notin \dot{3} \end{array}\right\} \Rightarrow 31\notin \dot{3} \qquad \left.\begin{array}{c} 9+1=10 \\ 3\cdot 3=9\,;\,3\cdot 4=12 \Rightarrow 10\notin \dot{3} \end{array}\right\} \Rightarrow 91\notin \dot{3}$$

$$\left.\begin{array}{c} 2+2=4 \\ 3\cdot 1=3\,;\,3\cdot 2=6 \Rightarrow 4\notin \dot{3} \end{array}\right\} \Rightarrow 22\notin \dot{3} \qquad \left.\begin{array}{c} 8+9=17 \\ 3\cdot 5=15\,;\,3\cdot 6=18 \Rightarrow 17\notin \dot{3} \end{array}\right\} \Rightarrow 89\notin \dot{3}$$

3) Todos los números cuya última cifra es cero o 5 son múltiplos de cinco y todos los que acaban en cualquier otra cifra no los son.
4) Todos los números cuya última cifra es cero son múltiplos de 10 y todos los que terminan en cualquier otra cifra no lo son.

FIN.

Hemos mejorado bastante, sobre todo en lo relativo a los múltiplos de 2, 5 y 10. El criterio para ser o no ser múltiplo de 3 es más útil con números mayores, ya que se puede repetir el proceso de sumar las cifras hasta que obtengamos un número lo suficientemente pequeño como para concluir a simple vista si se trata o no de un múltiplo de 3.

<u>Ejemplo</u>

Comprueba si 123 456 y 975 753 235 son múltiplos de 3.

- Respuesta:
  - 123 456 $\in \dot{3}$
  - 975 753 235 $\notin \dot{3}$
- Demostración:
  - 1+2+3+4+5+6 = 21 = 3·7 $\Rightarrow 123456 \in \dot{3}$
  - 9+7+5+7+5+3+2+3+5 = 46. Ahora bien, ¿es 46 múltiplo de 3? Sumemos sus cifras para comprobarlo.
    - 4+6 = 10 ; 3·3 = 9; 3·4 =12 luego 10$\notin \dot{3}$, de donde se deduce que 46$\notin \dot{3}$ y por lo tanto $975753235 \notin \dot{3}$

FIN.

Evidentemente no acaban aquí las propiedades de los múltiplos, ya que no disponemos de ninguna herramienta que nos facilite distinguir múltiplos y no múltiplos de otros números, como el 4, el 6, el 7, el 8, etc. En otros capítulos dedicados a la divisibilidad añadiremos resultados teóricos en este sentido, ya que conviene antes hacer aparecer otros asuntos tales como los múltiplos comunes o los números primos y compuestos. No obstante, cerraremos este primer capítulo dedicado a la divisibilidad con una última proposición dedicada a los números pares y la demostración de la verdad que asegura.

<u>Proposición</u>

La siguiente afirmación es verdadera:

Todos los múltiplos de un número par son pares,
O lo que es lo mismo,
Ningún número impar es múltiplo de un número par.

<u>Demostración</u>

Sea I un múltiplo cualquiera de un número par cualquiera al que llamaremos N.

Sabemos que N es un múltiplo de 2 y podremos encontrar un número natural X que cumpla que

$$N = 2 \cdot X \text{ (igualdad nº1)}$$

Como todos los múltiplos de N se obtienen multiplicando N por otro número natural, e I es un múltiplo de N existirá un número natural Y que verifique que

$$I = N \cdot Y \text{ (igualdad nº2)}$$

Sustituyendo la igualdad nº1 en la nº2 obtenemos:

$$I = (2 \cdot X) \cdot Y$$

que equivale a

$$I = 2 \cdot (X \cdot Y).$$

De la última igualdad se deduce evidentemente que I es múltiplo de 2, o sea par, y como I representa un múltiplo cualquiera de un número par cualquiera, resulta que todos los múltiplos de un número par son pares. (Como queríamos demostrar).

<u>Ejemplo</u>

Comprueba si 812 345 321 296 417 es múltiplo de 42.

- Respuesta:

  812 345 321 296 417 <u>no</u> es múltiplo de 42.

- Demostración:

  Basta tener en cuenta la proposición que afirma que ningún número impar es múltiplo de un número par.

FIN.

Nos veremos en próximos capítulos.